数理方程

北京师范大学　郑才溢

北京師範大學 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

< 一阶 PDE>

1　一阶非齐次 ODE

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\qquad \text{通解为 } y(x)=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\quad \text{(积分因子法)}$$

2　一阶非齐次 PDE　$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=f(x,y)$

(1) 将 $(x,y)\Rightarrow(\xi,\eta)$ 以降维

$$\underbrace{(A\frac{\partial\xi}{\partial x}+B\frac{\partial\xi}{\partial y})}\frac{\partial u}{\partial\xi}+(A\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\frac{\partial\eta}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu=f(x,y)$$

$$\begin{cases}A\frac{\partial\xi}{\partial x}+B\frac{\partial\xi}{\partial y}=0\\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\xi_x}{\xi_y}\end{cases}\Longleftrightarrow\ \frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}$$

其解为 $\varphi(x,y)=r$
取 $\xi=\varphi(x,y)$ 即可

(2) 选取 η ，η 需满足：

1. 与 ξ 线性无关
2. 使 $f(x,y)$ 变换为 $f(\xi,\eta)$ 好表示

< 二阶 PDE 的通解 >

[二阶 PDE 标准型]

1　特征方程的引出

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

$$\underbrace{a\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}}_{\text{a = 0}}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+c\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu=G\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{特征方程} A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}=\xi(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2+AC}}{A}=\eta(x,y)$$

$$\Longrightarrow\triangle=4(B^2-AC)$$

$$a=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$

$$b=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$c=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

$$d=A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\xi}{\partial x}+E\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

$$e=A\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+D\frac{\partial\eta}{\partial x}+E\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

2　标准型方程

- $\triangle>0\Longrightarrow a=c=0$　$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{1}{2b}\left(d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu-G\right)\quad\xrightarrow[\eta=\mu-v]{\xi=\mu+v}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial\mu^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}=\cdots$

- $\triangle=0(B^2=AC)\Longrightarrow a=b=0$
特征方程的解为重根 $\xi(x,y)$ ，取与 $\xi(x,y)$ 线性无关的 $\eta(x,y)$　$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=-\frac{1}{c}\left(d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu-G\right)$

- $\triangle<0\Longrightarrow a=c,b=0$
特征方程的解为 $\psi(x,y)=\psi_1(x,y)+i\psi_2(x,y)$
取 $\xi=\psi_1(x,y),\eta=\psi_2(x,y)$　$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=-\frac{1}{a}\left(d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu-G\right)$

[泛定方程的通解]

1　常系数齐次

ODE:　$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=0$
特征方程：$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0=0$
若 λ 为 k 重根，则基为 $e^{\lambda x},xe^{\lambda x},\cdots,x^{k-1}e^{\lambda x}$

对实空间的方程，复根必以共轭 $m\pm ni$ 的形式出现
此时对应的基 $e^{mx}e^{inx}$ 与 $e^{mx}e^{-inx}$ 可以写为：
$e^{mx}(c_1cosnx+c_2sinnx)$

PDE:　$\mathbf{L}(D_x,D_y)u=0$

(1): D_x,D_y 是齐 n 次式
$\mathbf{L}u=[A_0D_x^n+A_1D_x^{n-1}D_y+\cdots+A_nD_y^n]u=0$
附加方程：$A_0\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}+\cdots+A_n=0$
若 α 为 k 重根，则基为：
$\varphi_1(y+\alpha x),x\varphi_2(y+\alpha x),\cdots x^{k-1}\varphi_k(y+\alpha x)$

(2): $L(D_x,D_y)=\prod_{i=1}^{n}(D_x-\alpha_iD_y-\beta_i)$
若对应 k 重因子，则基为：
$e^{\beta x}\varphi_1(y+\alpha x)\ ,\cdots,x^{k-1}e^{\beta x}\varphi_k(y+\alpha x)$

2　欧拉型 $x^my^nD_x^mD_y^n$

令 $x=e^t,y=e^s\Rightarrow xD_x=D_t\Longrightarrow x^mD_m=D_t(D_t-1)\cdots(D_t-m+1)$

3　常系数非齐次

常系数非齐次方程 $\mathbf{L}u=f(x,y)$ 可以通过求非齐次特解与齐次通解实现：$\begin{cases}\mathbf{L}u_1=f(x,y) & u_1 \text{ 为特解}\\ \mathbf{L}u_2=0 & u_2 \text{ 为通解}\end{cases}\Rightarrow u=u_1+u_2$

其中 $\mathbf{L}u_2=0$ 为第一节中讨论过的二阶常系数齐次 PDE，因此只需找到非齐次方程的特解即可：

(1): 若 $\mathbf{L}(D_x,D_y)=\prod_{i=1}^{n}(D_x-\alpha_iD_y-\beta_i)$
计算 n 个一阶非齐次 PDE 的特解即可（详见例 1）

(2): 若 $f(x,y)=x^my^n$ (多项式型)
将 $\mathbf{L}(D_x,D_y)$ 形式地展开即可 (详见例 2)

(3): 若 $f(x,y)=f(ax+by)$ ，且 $\mathbf{L}(D_x,D_y)$ 是齐 n 次式
则可找 $g(ax+by)$ s.t. $g^{(n)}(ax+by)=f(ax+by)$ ，特解 $u(x,y)=\frac{g(ax+by)}{L(a,b)}$

< 定解问题 >

1　通解与定解关系

泛定方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$　$\begin{pmatrix}-\infty<x<\infty\\ -\infty<t<\infty\end{pmatrix}$　$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & -\infty<x<\infty\quad t>0\\ u\big|_{t=0}=\phi(x)\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$　(达朗贝尔解)

通解为 $u=f_1(x+at)+f_2(x-at)$

达朗贝尔解：
$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$　$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,y) & 0<x<l\quad t>0\\ u\big|_{x=0}=h(t)\quad u\big|_{x=l}=g(t)\\ u\big|_{t=0}=\phi(x)\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$　(一维波动通式)

2　S-L 型本征值问题

$$\begin{cases}\mathbf{L}y+\lambda\rho(x)y=0\ ,\mathbf{L}=\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right]-q(x)\quad(a<x<b)\\ \alpha_1y(a)-\beta_1y'(a)=0\quad\alpha_2y(b)-\beta_2y'(b)=0\quad\text{(齐次边界条件)}\\ k(x)>0,\rho(x)>0,q(x)\geq0\\ \alpha,\beta\geq0\text{且不全为 }0\end{cases}$$

- $\lambda\geq0$ ，对一、三类齐次边界条件有 $\lambda>0$
- 每个 λ_n 有一个与之对应的特征函数 $y_n(x)$
- $\int_a^b y_n(x)y_m^*(x)\rho(x)dx=0$　(注意有权 $\rho(x)$)
- 对区间在 $[a,b]$ 上的 $f(x)$,$f(x)=\sum C_ny_n(x)$
$C_n=\frac{1}{||y_n||^2}\int_a^b\rho(x)y^*(x)f(x)dx$

3 一维方程通法

- **齐次化边界条件** $u = v + P$ ，使 P 满足边界条件: $P\big|_{x=0} = h(t) \quad P\big|_{x=L} = g(t)$

此时 v 为齐边界的:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f - (P_{tt} - a^2 P_{xx}) \\ v\big|_{x=0} = 0 \quad v\big|_{x=l} = 0 \\ v\big|_{t=0} = \phi - P\big|_{t=0} \quad v_t\big|_{t=0} = \psi - P_t\big|_{t=0} \end{cases}$$

表 1: 齐次化边界条件 (P 的选取)

$u\big\|_{x=0} = h(t)$	$u\big\|_{x=l} = g(t)$:	$P = \dfrac{g(t) - h(t)}{l} x + h(t)$
$u\big\|_{x=0} = h(t)$	$u_x\big\|_{x=l} = g(t)$	$P = g(t)x + h(t)$
$u_x\big\|_{x=0} = h(t)$	$u\big\|_{x=l} = g(t)$	$P = h(t)x + g(t) - lh(t)$
$u_x\big\|_{x=0} = h(t)$	$u_x\big\|_{x=l} = g(t)$	$P = \dfrac{g(t) - h(t)}{2l} x^2 + h(t)x$

再令 $v = w_1 + w_2$ ，w_1 ，w_2 分别满足:

$$\begin{cases} w_{1tt} - a^2 w_{1xx} = F(x,t) & (F = f - (P_{tt} - a^2 P_{xx})) \\ w_1\big|_{x=0} = 0 \quad w_1\big|_{x=l} = 0 & (\text{非齐次方程}) \\ w_1\big|_{t=0} = 0 \quad w_{1t}\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{2tt} - a^2 w_{2xx} = 0 \\ w_2\big|_{x=0} = 0 \quad w_2\big|_{x=l} = 0 & (\text{齐次方程}) \\ w_2\big|_{t=0} = \phi - P\big|_{t=0} \quad w_{2t}\big|_{t=0} = \psi - P_t\big|_{t=0} \end{cases}$$

- **齐次化原理**

$$\text{若 } \xi(x,t;\tau) \text{ 满足} \begin{cases} \xi_{tt} - a^2 \xi_{xx} = 0 \quad t > \tau \\ \xi\big|_{x=0} = 0 \quad \xi\big|_{x=l} = 0 \\ \xi\big|_{t=0} = 0 \quad \xi_t\big|_{t=0} = F(x,\tau) \end{cases} \xRightarrow{t \to t - \tau} w_1 = \int_0^t \xi(x, t-\tau; \tau) d\tau$$

- **本征函数展开法**

表 2: 本征方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 的本征函数集

$u\big\|_{x=0} = 0$	$u\big\|_{x=l} = 0$	$\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$	$X_n(x) = B_n \sin \dfrac{n\pi}{l} x, n = 1,2,3,\cdots$
$u_x\big\|_{x=0} = 0$	$u_x\big\|_{x=l} = 0$	$\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$	$X_n(x) = A_n \cos \dfrac{n\pi}{l} x, n = 0,1,2,\cdots$
$u\big\|_{x=0} = 0$	$u_x\big\|_{x=l} = 0$	$\lambda_n = \left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$	$X_n(x) = B_n \sin \dfrac{(2n+1)\pi}{2l} x, n = 0,1,2,\cdots$
$u_x\big\|_{x=0} = 0$	$u\big\|_{x=l} = 0$	$\lambda_n = \left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$	$X_n(x) = A_n \cos \dfrac{(2n+1)\pi}{2l} x, n = 0,1,2,\cdots$

< 正交曲面坐标系 >

1 Laplace 算符

$$\Delta = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H}{H_i^2} \frac{\partial}{\partial q_1} \right)$$

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$H = H_1 H_2 H_3$(拉梅系数)

柱坐标 (r, φ, z):

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

极坐标 (r, φ):

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

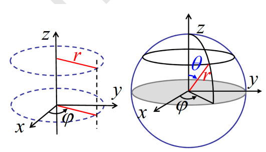

图 1: From 伟大的陈黎教授

球坐标 (r, θ, φ)

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

2 二维稳态 Laplace 问题 (圆形区域)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad 0 < r < a \\ u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=2\pi} \\ u_\varphi\big|_{\varphi=0} = u_\varphi\big|_{\varphi=2\pi} \end{cases} \qquad u = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}) \sin m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}) \cos m\varphi$$

3 Helmholtz 方程 $\Delta u + \kappa u = 0$

- **柱坐标**

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' + (\eta^2 r^2 - \mu) R = 0 \\ \Theta'' + \mu\Theta = 0 \qquad (\eta^2 = \kappa - \lambda) \\ Z'' + \lambda Z = 0 \end{cases} \xRightarrow[\mu = \eta^2]{x = \eta r,\ y = R} x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

n 阶 Bessel 方程

- **球坐标**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2} \dfrac{d}{dr} \left(r^2 \dfrac{dR}{dr} \right) + \left(\kappa - \dfrac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \\ \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \dfrac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \dfrac{\mu}{\sin\theta} \right) \Theta = 0 \end{cases} \xRightarrow[y = \Theta]{x = \cos\theta} \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{\mu}{1 - x^2} \right) y = 0$$

连带 Legendre 方程

4 Legendre 方程

- **Legendre 方程**

方程关于 z 轴对称时，$\mu = 0$ ，连带 Legendre 方程简化为 Legendre 方程 $\mathbf{L}y + \lambda y = 0, \mathbf{L} = \dfrac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \dfrac{d}{dx} \right]$

- **x = 0 邻域内的解** $y(x) = C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x)$

$$y_0(x) = 1 - \frac{l(l+1)}{2!} x^2 + \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!} x^4 - \frac{(l-4)(l-2)l(l+1)(l+3)(l+5)}{6!} x^6$$

$$y_1(x) = x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!} x^3 + \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!} x^5 - \frac{(l-5)(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)(l+6)}{7!} x^7$$

取 $l = 0, 1, 2, \cdots$ 截断 Legendre 函数，使其在 $x = \pm 1$ 上有界 (对应 $\theta = n\pi$) 被截断的部分称为 Legendre 多项式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{m=0}^{[\frac{l}{2}]} (-1)^m \frac{(2l - 2m)!}{m!(l-m)!(l-2m)!} x^{l-2m}$$

- **x = 1 邻域内的解** $y(x) = C_1 P_\nu(x) + C_2 Q_\nu(x)$

$w'' + p(z)w' + q(z) = 0$ ，z_0为其正则奇点 $\xRightarrow{\text{指标方程}}$ $\rho(\rho - 1) + p_{-1}\rho + q_{-2} = 0$ 解为 ρ_1, ρ_2

$$p_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) p(z) \qquad q_{-2} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^2 q(z)$$

方程在 $0 < |z - z_0| < R$ 有两个正则解

$$\begin{cases} w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ w_2(z) = g w_1(z) \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{cases}$$

- $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时,w_2 不含对数项
- $\rho_1 = \rho_2$ 时，w_2 一定有对数项
- w_2 中 g 与 d_k 的系数要重代回方程中确定

$$P_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + n + 1)}{(n!)^2 \Gamma(\nu - n + 1)} \left(\frac{x - 1}{2} \right)^n \qquad Q_\nu(x) = \frac{1}{2} P_\nu(x) \ln \frac{x+1}{x-1} - \sum_{n=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{2\nu - 4n + 3}{(2n-1)(\nu - n + 1)} P_{\nu - 2n + 1}(x)$$

$Q_\nu(x)$ 在 $x = \pm 1$ 总发散，取 $C_2 = 0$ ，并取 $\nu = l = 0, 1, 2 \cdots$ 使 $P_\nu(x)$ 在 $x = \pm 1$ 收敛，$P_l(x)$ 为 Legendre 多项式:

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+1)!}{(l-1)!} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$$

- **轴对称 Laplace 方程**

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1) R = 0 \\ \mathbf{L}y + l(l+1) y = 0 \quad (y = \Theta) \end{cases} \xRightarrow{u = R(r)\Theta(\theta)} u = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta)$$

5 Legendre 多项式

- **微分表述** $P_l(x) = \dfrac{1}{2^l l!}\dfrac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$ (Rodrigues 公式)

  $n = 1, 2, 3, \cdots$

- **生成函数** $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l$

- **递推公式**

  § $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

  § $P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x)$

  § $nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)$

  § $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$

  § $(2n+1)xP_n(x) = nP'_{n+1}(x) + (n+1)P'_{n-1}(x)$

  $n = 0, 1, 2, \cdots$

  § $(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x)$

- **正交完备性** $\left|\left|P_l(x)\right|\right|^2 = \dfrac{2}{2l+1} \xrightarrow{f(x)=\sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x)} C_l = \dfrac{1}{\left|\left|P_l(x)\right|\right|^2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx$

- **特殊性质**

§ $f(x)$ 为 k 次多项式，$k < l$ 则 $\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx = 0$ （利用 Rodrigues 公式分部积分）

§ $\displaystyle\int_x^1 P_l(x)P_k(x)dx = (1-x^2)\frac{P'_k(x)P_l(x) - P'_l(x)P_k(x)}{k(k+1)-l(l+1)}$ （重要积分）

6 连带 Legendre 方程

- **与 Legendre 方程的关联**

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \xRightarrow{y(x)=(1-x^2)^{m/2}\xi(x)} (1-x^2)\xi'' - (2m+1)x\xi' + (\lambda - m(m+1))\xi = 0$$

$$\xRightarrow{\xi(x)=u^{(m)}(x)} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] + \lambda u = 0 \quad \text{(Legendre 方程)}$$

$\Longrightarrow y(x) = c_1(1-x^2)^{m/2}P_l^{(m)}(x)$ 显然有 $m \le l$

$\xRightarrow{\text{取}c_1=(-)^m} y(x) = (-)^m(1-x^2)^{m/2}P_l^{(m)}(x) \xRightarrow{\text{记作}} P_l^m(x)$ 警告：$P_l^{(m)}(\cos\theta)$ 是对 $\cos\theta$ 整体求导

- **连带勒让德函数的性质**

正交性：同阶不同次正交 $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)dx = 0 \quad (k \ne l)$ $\left|\left|P_l^m(x)\right|\right|^2 = \dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\dfrac{2}{2l+1}$

7 三维稳态 Laplace 问题（球坐标）$\Delta u = 0$

- **球谐函数** $\left\{Y_{lm}^{(1)}(\theta,\varphi), Y_{lm}^{(2)}(\theta,\varphi)\right\}$ 构成二维完备函数

$$\begin{cases} r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \quad \text{(Euler 方程)} \\ \Phi'' + \mu\Phi = 0 \quad \text{(周期条件的 S-L 问题)} \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \dfrac{\mu}{\sin\theta}\right)\Theta = 0 \end{cases}$$

其中，关于 Φ, Θ 构成本征值问题

本征值：$\begin{matrix}\lambda = l(l+1) \\ \mu = m^2\end{matrix}$ 共 $2l+1$ 个本征函数

本征函数：

$Y_{lm}^{(1)}(\theta,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l$

$Y_{lm}^{(2)}(\theta,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi \quad m = 1, 2, \cdots, l$

$\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \text{周期边界条件} \end{cases}$ **本征值**：$\mu = m^2 \quad m = 0, 1, 2, \cdots$ **本征函数**：$\Phi_1 = \cos m\varphi \quad \Phi_2 = \sin m\varphi$

$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \dfrac{\mu}{\sin\theta}\right)\Theta = 0 \\ \Theta(0), \Theta(\pi)\text{有界} \end{cases}$

本征值：$\lambda_l = l(l+1) \quad l = m, m+1, m+2, \cdots$

本征函数：$P_l^m = (-)^m \sin\theta P_l^{(m)}(\cos\theta)$

$\begin{cases} r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ R\big|_{r\to 0}\text{或}R\big|_{r\to\infty}\text{有界} \end{cases}$ **本征值**：$\lambda = l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, \cdots$ **本征函数**：$R_1 = r^l \quad R_2 = r^{-(l+1)}$

- **球谐函数性质**

正交性:l 或 m 不同的球谐函数在整个 4π 立体角上正交 $\left|\left|Y_{l0}^{(1)}\right|\right|^2 = \dfrac{4\pi}{2l+1}$ $\left|\left|Y_{l0}^{(2)}\right|\right|^2 = 0$ $\left|\left|Y_{lm}^{(i)}\right|\right|^2 = \dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\dfrac{2\pi}{2l+1}$

- **三维稳态 Laplace 问题的通解**

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)}\right)\left(A_{lm}Y_{lm}^{(1)}(x) + B_{lm}Y_{lm}^{(2)}(x)\right)$$

8 补充：超几何方程

- **超几何方程**

$z(1-z)w''(z) + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]w'(z) - \alpha\beta w(z) = 0$

级数解：$\begin{cases} w_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n \equiv F(\alpha,\beta,\gamma;z), |z| < 1 \\ w_2(z) = F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z) \end{cases} \xRightarrow[\beta\to\infty]{\xi=\beta z}$

- **合流超几何方程**

$zw''(z) + (\gamma - z)w'(z) - \alpha z = 0$

级数解：$\begin{cases} w_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n = F(\alpha,\gamma;z) \\ w_2(z) = z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z) \end{cases}$

< 特殊函数 >

Γ 函数

1 定义： $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$

2 Γ 函数的性质

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(z+1) = \Gamma(z)$
3. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$
4. $\Gamma(2z) = \dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(\dfrac{1}{2}+z)$
5. $\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}$
   （物理中常用 $\ln n! \sim n\ln n - n$ ）
6. $z = 0, -1, \cdots$ 为 Γ 函数一阶奇点
   $\operatorname*{Res}\limits_{z=-k}\Gamma(z) = (-)^k\dfrac{1}{k!}$

Ψ 函数

1 定义： $\Psi(z) = \dfrac{d\ln z}{dz} = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

2 Ψ 函数的性质

1. $\Psi(z+1) = \Psi(z) + \dfrac{1}{z}$
2. $\Psi(z) = \Psi(1-z) + \pi\cot\pi z$
3. $\Psi(z) - \Psi(-z) = -\dfrac{1}{z} - \pi\cot\pi z$
4. $\Psi(2z) = \dfrac{1}{2}\Psi(z) + \dfrac{1}{2}\Psi(z+\dfrac{1}{2}) + \ln 2$
5. $z = 0, -1, \cdots$ 为 Ψ 函数一阶奇点
   $\operatorname*{Res}\limits_{z=-k}\Psi(z) = -1$

B 函数

1 定义：

$B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

2 B 函数的性质

1. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
2. 利用 **B** 函数易证 Γ 函数性质 3、4（见附录）

< 本征值大杂烩 > $\mathbf{L}u + \lambda u = 0$

1 $\mathbf{L} = \dfrac{d^2}{dx^2}$ **（齐次边界条件）：见表 2**

2 $\mathbf{L} = \dfrac{d^2}{dx^2}$ **（周期边界条件）**

本征值： $\lambda = m^2 \quad m = 0, 1, 2, \cdots$

本征函数：$X_1(x) = \sin mx \quad X_2(x) = \cos mx$ $\Longrightarrow$ 除 $m = 0$ 外，每个本征值对应两个本征函数

3 $\mathbf{L} = \dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx}\right]$

本征值： $\lambda = l(l+1)$

本征函数 $X(x) = P_l(x)$

4 $\mathbf{L} = \dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx}\right] - \left(\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)$

本征值： $\lambda = l(l+1) \quad l = m, m+1, m+2, \cdots$

本征函数 $X_(x) = P_l^m(x)$

常见 Legendre 与连带 Legendre 多项式：

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^2 - 3x)$

$P_4(x) = \dfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_5(x) = \dfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

$P_0^0(\theta) = 1$

$P_1^0(\theta) = \cos\theta$

$P_1^1(\theta) = -\sin\theta$

$P_2^0(\theta) = \dfrac{1}{4}(1 + \cos 2\theta)$

$P_2^1(\theta) = -\dfrac{3}{2}\sin 2\theta$

$P_2^2(\theta) = \dfrac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)$

< 附录 >

1 积分因子法

一阶线性 ODE 标准型：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

两边同乘积分因子 $V(x)$ 将左式构造为 $\dfrac{d}{dx}[V(x)\cdot y(x)]$

$$V(x)\frac{dy}{dx}+V(x)P(x)y=Q(x)V(x) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}[V(x)\cdot Q(x)]=\frac{dV(x)}{dx}y(x)+V(x)\frac{dy(x)}{dx}\quad \text{(比对目标形式)} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{dV(x)}{dx}=V(x)P(x)\quad \text{既}\quad V(x)=e^{\int P(x)dx} \tag{3}$$

因此确实存在积分因子 $V(x)=e^{\int P(x)dx}$ 使得标准型两边同乘 $V(x)$ 后，左式变为 $\dfrac{d}{dx}[V(x)\cdot y(x)]$

$$\frac{d}{dx}[V(x)\cdot y(x)]=Q(x)V(x) \tag{4}$$

$$V(x)y(x)=\int V(x)Q(x)dx \tag{5}$$

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx \tag{6}$$

2 分离变量法与本征函数展开法辨析

以顾樵先生课本上例题 (P225) 为例:

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 \qquad (0<x<L,t>0) \\ u\big|_{t=0}=\cos\dfrac{3\pi}{2L}x \\ u_x\big|_{x=0}=0 \quad , \quad u\big|_{x=L}=0 \end{cases} \tag{7}$$

- **分离变量法**

x 是齐边界的，考虑用分离变量法构建关于 x 的本征值问题, 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 带入泛定方程中有

$$X(x)T'(t)-a^2X''(x)T(t)=0 \tag{8}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{T'(t)}{T(t)}-a^2\frac{X''(x)}{X(x)}=0 \tag{9}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \tag{10}$$

此处移动 a^2 与设置成 $-\lambda$ 均是为了构成 x 的本征值问题:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(x)=0 \quad , \quad X(L)=0 \end{cases} \tag{11}$$

这是一个由简单的二阶齐次 ODE 构成的本征值问题，其特征方程为 $r^2+\lambda=0$ ， $\triangle=-4\lambda$

1. $\lambda>0\quad(\triangle<0)$： 泛定方程通解为 $X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$

   带入边界条件解得 $X(x)=A\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}x$ ，对应本征值为 $\lambda=\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2$
2. $\lambda=0\quad(\triangle=0)$： 泛定方程通解为 $X(x)=Ax$, 带入边界条件解得 $A=0$ 对应平凡解，舍
3. $\lambda<0\quad(\triangle>0)$： 泛定方程通解为 $X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

   带入边界条件解得 $A=B=0$ ，仅有平凡解，舍

综上所述，对应每一个 $\lambda=\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2\quad(n=0,1,2,\cdots)$，有一个本征函数 $X(x)=A\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}x$

这些本征函数对应一个本征函数集 $\left\{\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}x\right\}$, 确定了这个定解问题的解

$$X(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \tag{12}$$

本征值问题

本征值问题就是在通解对应的整个函数空间中，寻找满足边界条件的解

泛定方程的通解对应一个函数空间，所有满足泛定方程的解都在这个空间内。但这些解并不都满足边界条件，因此还需进一步筛选出满足边界条件的解，也可以理解成**剔除不满足边界条件的解**。

”寻找”或者“剔除”，其实还隐含本征值问题的另两个特点：**1: λ 是一个参数而非给定的值　2: 本征值问题是线性的**，正因此，解的形式才是由本征函数集叠加而成的。

接着我们来解另一个常微分方程 $T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$ ，其通解为 $T(t)=e^{-\lambda a^2t}$

注意此处的 $\lambda=\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}x\right]^2\quad n=0,1,2,\cdots$ ，因为要满足上述本征值问题。综上，方程的解为:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)e^{-\lambda a^2t} \tag{13}$$

比对初始条件

$$u(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2L}x \tag{14}$$

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \tag{15}$$

$\cos\dfrac{3\pi}{2L}x$ 恰为函数空间的一个“基”，因此有 $A_1=0\quad,\quad A_{n\neq1}=0$

注意：此处可以直接比对源于其各基线性无关（更进一步说，S-L 型方程的本征函数集在一维函数上是完备的），不要误以为只有正交的基才能这么进行比对。综上:

$$u(x,t)=\cos\frac{3\pi}{2L}xe^{-\left(\frac{3\pi a}{2L}\right)^2t} \tag{16}$$

- **本征函数展开法**

由方程的形式写出一组本征函数集 $\left\{\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}x\right\}$ ，设形式解为:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \tag{17}$$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n'(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \tag{18}$$

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}-\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2T_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \tag{19}$$

带入泛定方程中有

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x + a^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2 T_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x = 0 \tag{20}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(T_n'(t)+\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2L}\right)^2 T_n(t)\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \quad = 0 \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x = \cos\frac{3\pi}{2}x \end{cases} \tag{21}$$

整理得到关于 $T_n(t)$ 的常微分问题初值问题:

$$\begin{cases} T_1'(t)+\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 T_1(t) \\ T_1(0)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_n'(t)+\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2L}\right)^2 T_n(t) \\ T_n(0)=0 \quad (n\neq 1) \end{cases} \tag{22}$$

左方程组的解为 $T_1(t)=e^{-\frac{3a\pi}{2L}t}$ ，右方程组的解为 $T_n(t)=0 \quad (n\neq 1)$ ，因此定解问题的解为:

$$u(x,t)=\cos\frac{3\pi}{2L}xe^{-\left(\frac{3\pi a}{2L}\right)^2 t} \tag{23}$$

本征函数展开法

本征函数展开法是建立在分离变量法的结论之上，借助分离变量的思路，更广泛更一般的方法。在面对一些非齐次 PDE 时效果更好。

本征函数展开法的思路是寻找一组**完备的本征函数集** $\{X(x)\}$ ，将非齐次项，初始条件等展开为本征函数的形式 $u(x,t)=\sum T_n(t)X_n(x) \quad f(x,t)=\sum f_n(t)X_n(x)$ ，通过比对系数获得**关于 $T_n(t)$ 的常微分方程的初值问题**。对复杂问题一般会采用拉普拉斯变换法。(注意：非齐次方程是无法分离变量的)

如果将原定解问题改为非齐次定解问题，引入 $f(x,t)=A\sin\omega t\cos\frac{3\pi}{2L}x$:

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=A\sin\omega t\cos\frac{3\pi}{2L}x \qquad (0<x<L, t>0) \\ u\big|_{t=0}=\cos\frac{3\pi}{2L}x \\ u_x\big|_{x=0}=0 \quad , \quad u\big|_{x=L}=0 \end{cases} \tag{24}$$

将 $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \quad f(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x$ 带入方程中有:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(g_n'(t)+\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2L}\right]^2 g_n(t)\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(0)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x=\cos\frac{3\pi}{2L}x \end{cases} \tag{25}$$

整理得到关于 $g_n(t)$ 的常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} g_1'(t)+\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 g_1(t)=A\sin\omega t \\ g_1(0)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_n'(t)+\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2L}\right)^2 g_n(t)=0 \\ g_n(0)=0 \quad (n\neq 1) \end{cases} \tag{26}$$

右方程组的解为 $g_n(t)=0 \quad (n\neq 1)$ ，接下来利用拉普拉斯变换法求解左方程组，取拉普拉斯变换，注意到 $\frac{dg(t)}{dt}\longleftrightarrow pG(p)-g(0)$ ，$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}=\frac{1}{p+\alpha}$ ，$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$$pG(p)-1+\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 G(p)=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2} \tag{27}$$

$$G(p)=\left(\frac{1}{p+\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2}\right)+\left(\frac{\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}}{p+\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2}\right) \tag{28}$$

其中

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2}\right\}=e^{\left(-\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t} \tag{29}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}}{p+\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2}\right\}=A\sin\omega t * e^{\left(-\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t} \tag{30}$$

因此

$$\begin{aligned} g_1(t)&=e^{\left(-\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}+A\sin\omega t * e^{\left(-\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t} && (31)\\ &=e^{\left(-\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}\left(1+\int_0^t A\sin\omega t e^{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}dt\right) && (32)\\ &=e^{\left(-\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}\left\{1+\frac{A}{(1+\omega)\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)}\left[e^{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}\left(sin\omega t-\frac{\omega}{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}\cos\omega t\right)+\frac{\omega}{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}\right]\right\} && (33) \end{aligned}$$

综上:

$$u(x,t)=e^{\left(-\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}\left\{1+\frac{A}{(1+\omega)\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)}\left[e^{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2 t}\left(sin\omega t-\frac{\omega}{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2}\cos\omega t\right)+\frac{\omega}{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2}\right]\right\}\cos\frac{3a\pi}{2L}x \tag{34}$$

3 齐次化原理

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t \\ u_x\big|_{x=0}=0 \quad u_x\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=0 \quad u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{35}$$

先解:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u_x\big|_{x=0}=0 \quad u_x\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=0 \quad u_t\big|_{t=0}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau \end{cases} \xRightarrow{\text{本征函数展开法}} \begin{array}{l} \text{本征函数集}\{\cos\frac{n\pi}{l}x\} \quad \lambda=\left(\frac{n\pi}{l}x\right)^2 \quad n=0,1,2,\cdots \\ u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x \quad , \quad T_1'(0)=A\sin\omega\tau \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right)\cos\frac{n\pi}{l}x=0 \end{array}$$

$$\begin{cases} T_1''(t)+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T_1(t)=0 \\ T_1(0)=0 \quad T_1'(0)=A\sin\omega\tau \end{cases} \xRightarrow{\text{带入初值条件}} \begin{array}{l} T_1(t)=\frac{lA}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a}{l}t \\ T_n(t)=0 \quad (n\neq 1) \end{array} \Longrightarrow u(x,t;\tau)=\frac{lA}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a}{l}t\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$\begin{aligned} u^*(x,t)&=\int_0^t\frac{lA}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\cos\frac{n\pi}{l}xd\tau \\ &=\frac{lA}{\pi a}\left[\left(\frac{-\frac{\pi a}{l}}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\right)\sin\omega t+\left(\frac{\omega}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\right)\sin\frac{\pi a}{l}t\right]\cos\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$